Résolution d'équations

I- Tester une égalité

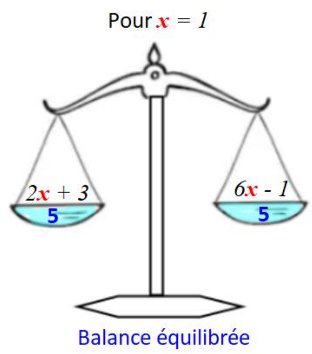
Définition

Une équation est une égalité qui comporte au moins un nombre de valeur inconnue, généralement désigné par une lettre.

Cette égalité peut être vraie pour certaines valeurs de l'inconnue et fausse pour d'autres.

Exemple

1) L'égalité $2x + 3 = 6x - 1$ est-elle vraie pour $x = 1$?



Réponse : On cherche à savoir si l'égalité $2x + 3 = 6x - 1$ est vraie ou fausse pour x =1.

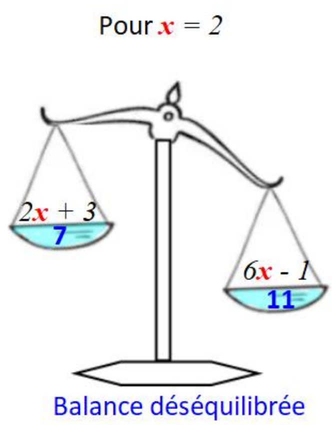
Méthode :

Pour $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3 = 2 \times 1 + 3 = 5 \\ 6x - 1 = 6 \times 1 - 1 = 5 \end{array}\right\}$$ D'où $2x + 3 = 6x - 1$ *est vraie pour* $x = 1$

On dit que 1 est **une solution** de l'équation $2x + 3 = 6x - 1$.

2) L'égalité $2x + 3 = 6x - 1$ est-elle vraie pour $x = 2$?



Réponse : On cherche à savoir si l'égalité $2x + 3 = 6x - 1$ est vraie ou fausse pour x =2.

On procède de la même manière en calculant les deux membres de l'égalité séparément puis on les compare.

Pour $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3 = 2 \times 2 + 3 = 7 \\ 6x - 1 = 6 \times 2 - 1 = 11 \end{array}\right\}$$ D'où l'égalité $2x + 3 = 6x - 1$ est fausse pour x = 2.

On dit que 2 n'est pas **une solution** de l'équation $2x + 3 = 6x - 1$.

II- Résoudre une équation du premier degré

Définitions

- **Résoudre une équation**, c'est trouver l'ensemble des nombres par lesquels remplacer l'inconnue pour que l'égalité soit vraie.
- Deux équations, qui ont exactement les mêmes solutions, sont dites **équivalentes**.

Une équation du premier degré à une inconnue est une égalité qui peut être ramenée sous la forme $\boldsymbol{ax = b}$ avec a et b deux nombres fixes et x l'inconnue.

Propriété 1

Ajouter ou soustraire un même nombre dans les deux membres d'une équation, la transforme en équation équivalente.
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\mathbf{k}$ désignent des nombres :

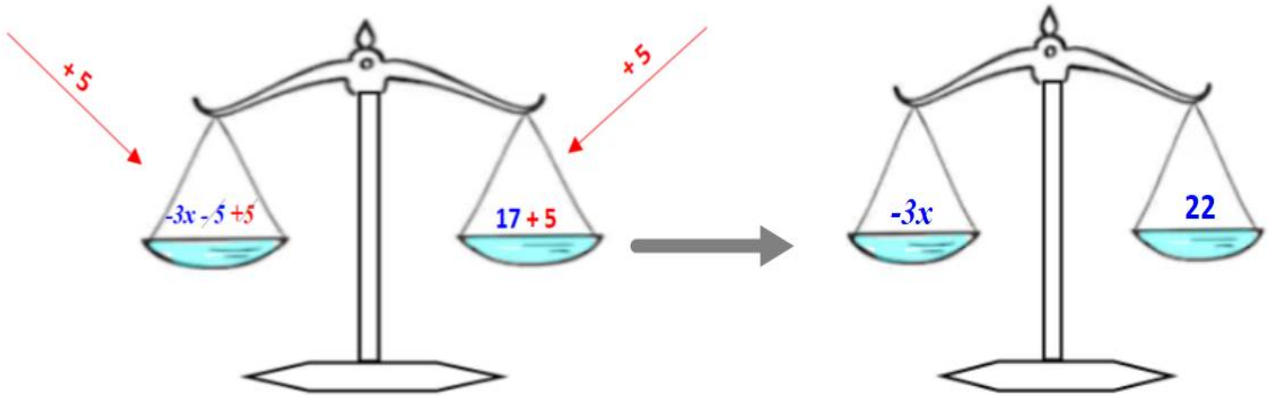
$$\boldsymbol{Si\ a = b\ signifie\ \ a + k = b + k}$$
$$\boldsymbol{Si\ a = b\ signifie\ \ a - k = b - k}$$

Exemple :

$-3x - 5 = 17$

$-3x - 5 + 5 = 17 + 5$

$\boldsymbol{-3x = 22}$ ⟵ $-3x = 22$ *est une* $\boldsymbol{équation\ équivalente}$ *de* $-3x - 5 = 17$



Propriété 2

Multiplier ou diviser par un même nombre non nul les deux membres d'une équation, la transforme en équation équivalente.
$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ et $\mathbf{k}$ désignent des nombres ($\boldsymbol{k} \neq 0$)

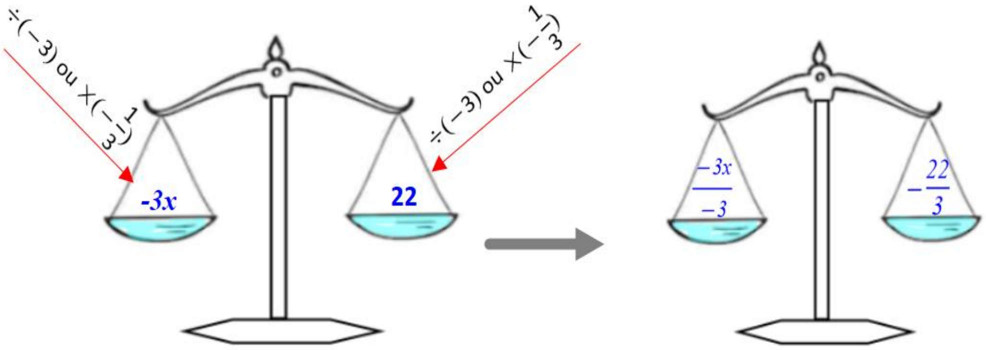
$$\boldsymbol{Si\ a = b\ signifie\ a \times k = b \times k}$$
$$\boldsymbol{Si\ a = b\ signifie\ \frac{a}{k} = \frac{b}{k}}$$

Exemple :

$-3x = 22$

$\dfrac{-3x}{\boldsymbol{-3}} = \dfrac{22}{\boldsymbol{-3}}$

$x = -\dfrac{22}{3}$



$-\frac{22}{3}$ *est l'inconnue qu'on cherche.*

On dit que $-\frac{22}{3}$ *est la solution de l'équation* $-3x-5=17$

Application : On veut résoudre l'équation $4x-7=25$.

$4x-7=25$

$4x-7+7=25+7$ ⟵ On ajoute 7 à chacun des deux membres de l'égalité

$\mathbf{4x=32}$

$\frac{4x}{4}=\frac{32}{4}$ ⟵ On divise par 4 les deux membres de l'égalité.

$x=8$

La solution de l'équation $4x-7=25$ est 8. On note $S=\{8\}$.

II- Equation produit

Propriété

Si a = 0 ou b = 0 alors a x b = 0

Si a x b = 0 alors a = 0 ou b = 0.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si (signifie) l'un au moins des facteurs est nul.

Exemple : Résoudre l'équation $(4x-1)(7x+6)=0$ revient trouver l'ensemble des solutions de cette équation.

$$(4x-1)(7x+6)=0$$

Signifie $4x-1=0$ $\quad ou \quad$ $7x+6=0$

Signifie $4x=1$ $\quad ou \quad$ $7x=-6$

Signifie $x=\frac{1}{4}$ $\quad ou \quad$ $x=\frac{-6}{7}$

Les solutions de l'équation $(4x-1)(7x+6)=0$ sont $-\frac{6}{7}$ *et* $\frac{1}{4}$.

On note $S=\left\{-\frac{6}{7};\frac{1}{4}\right\}$.

III- Equation de type $x^2 = a$

1- Rappel

Définition

Soit a un **nombre positif.**

On appelle racine carrée de a, et on note $\sqrt{a}$, le nombre positif dont le carré est égal au nombre a.

Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle le radical.

Exemples

$\sqrt{16} = 4 \; car \; 4^2 = 16 \;\; (4 \; est \; positif)$ $\qquad \sqrt{81} = 9 \; car \; 9^2 = 81$

Propriété

Soit a un nombre positif.

$$(\sqrt{a})^2 = a \quad et \quad \sqrt{a^2} = a$$

Exemples :

$(\sqrt{11})^2 = 11 \qquad \sqrt{121} = \sqrt{11^2} = 11 \qquad \sqrt{1} = \sqrt{1^2} = 1$

Remarque

$Si \; a \; est \; un \; nombre \; négatif \; \sqrt{a^2} \; est \; différent \; de \; a.$

Exemple :

$\sqrt{(-9)^2} = \sqrt{81} = 9$ (9 est différent de -9)

2- Résoudre une équation de type $x^2 = a$

Soit a un nombre relatif.

- $\mathbf{Si \; a < 0}$, $signifie \; l'équation \; x^2 = a \; n'admet$ $\mathbf{aucune \; solution}$.
- $\mathbf{Si \; a = 0}$, $signifie \; l'équation \; x^2 = 0, admet$ $\mathbf{une \; unique \; solution : 0}$.
- $\mathbf{Si \; a > 0}$, $signifie \; l'équation \; x^2 = a \; admet$ $\mathbf{deux \; solutions : \; \sqrt{a} \; et \; -\sqrt{a}}$.

Application : Résoudre les équations ci-dessous :

1) $x^2 = -64$ $\qquad$ 2) $x^2 = 0$ $\qquad$ 3) $x^2 = 36$

Réponse :

1) $x^2 = -64 \; n'admet \; pas \; de \; solution.$

2) $x^2 = 0 \; signifie \; x = 0, la \; solution \; de \; l'équation \; x^2 = 0 \;\; est \; 0 \; . \;\; S = \{0\}.$

3) $x^2 = 36 \;\; signifie \;\; x = \sqrt{36} \;\; ou \;\; x = -\sqrt{36} \;\; d'où \; x = 6 \; ou \; x = -6 \; .$

$L'équation \; x^2 = 36 \; admet \; deux \; solutions \; 6 \; et \; -6. \;\; S = \{-6 \, ; 6\}$