

# Fractions

## I – Notion de fraction

### Définition

Soient  $n$  et  $d$  deux nombres avec ( $d \neq 0$ ).

Le quotient de  $n$  par  $d$  est le nombre qui, multiplié par  $d$  donne  $n$ .

On le note  $\frac{n}{d}$  ou  $n \div d$ . Le nombre  $n$  est appelé **numérateur** et le nombre  $d$  **dénominateur**.

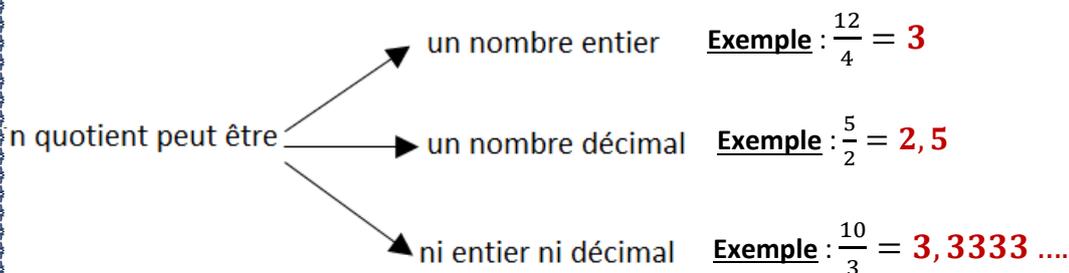
Si les nombres  $n$  et  $d$  sont des entiers, on dit que  $\frac{n}{d}$  est **une fraction**.

### Exemples :

- Le quotient de 7 par 3 est  $\frac{7}{3}$ . C'est le nombre qui multiplié par 3 donne 7 :  $\frac{7}{3} \times 3 = 7$ .
- $\frac{4}{11}$  est une fraction. 4 est le numérateur et 11 est le dénominateur.
- $\frac{5,5}{3}$  n'est pas écrit sous la forme d'une fraction car 5,5 n'est pas un nombre entier.

### Remarque

- Diviser par 0 est impossible.



## Fraction décimale

### Définition

On considère deux nombres  $a$  et  $b$  ( $b \neq 0$ ).

- Lorsque  $a$  est un nombre entier et  $b$  est égal à 10, 100, 1 000...., on dit que  $\frac{a}{b}$  est une **fraction décimale**.
- Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'une fraction décimale.

### Exemples

$\frac{17}{100}$  ;  $\frac{128}{10}$  et  $\frac{1445}{1000}$  sont des fractions décimales.

12,8 est un nombre décimal car  $12,8 = \frac{128}{10}$ .

**Proportion****Définition**

Une **proportion** est un rapport entre deux grandeurs.

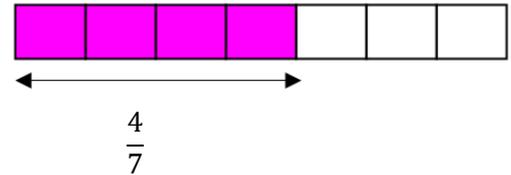
Dans un collège, quatre septièmes des élèves sont demi-pensionnaires.

On dit que la proportion d'élèves demi-pensionnaires du collège est  $\frac{4}{7}$ .

Nombre d'élèves demi – pensionnaires

Nombre total d'élèves

Cela signifie que sur 7 élèves du collège, 4 sont demi-pensionnaires.

**II- Egalité de quotients****Propriété**

Soient  $a$ ,  $b$  et  $k$  trois nombres ( $b \neq 0, k \neq 0$ ).

Un quotient  $\frac{a}{b}$  ne change pas lorsque l'on multiplie ou si l'on divise son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

**Exemples**

$$\frac{7,5}{3} = \frac{7,5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{15}{6}$$

$$\frac{21}{49} = \frac{21 \div 7}{49 \div 7} = \frac{3}{7}$$

**Simplifier une fraction****Méthode**

Simplifier une fraction, c'est la transformer en une fraction égale avec un numérateur et un dénominateur plus petit. Pour cela, on cherche un diviseur commun au numérateur et au dénominateur.

Ecrire une fraction sous sa forme **irréductible** revient à l'écrire avec un numérateur et un dénominateur les plus petits possibles.

**Exemples**

On veut simplifier la fraction  $\frac{24}{30}$ .

$$\frac{24}{30} = \frac{24 \div 2}{30 \div 2} = \frac{12}{15} = \frac{12 \div 3}{15 \div 3} = \frac{4}{5}$$

$$\text{ou} \quad \frac{24}{30} = \frac{6 \times 4}{6 \times 5} = \frac{4}{5}$$

fraction irréductible  
(on ne peut plus la simplifier)

Pour simplifier une fraction, on peut utiliser les critères de divisibilité.

**Diviser par un nombre décimal**

Pour diviser un nombre par un nombre décimal, on peut multiplier le dividende et le diviseur par 10, 100, 1 000... pour rendre le diviseur entier. Ensuite, on effectue la division.

**Exemple**

On veut effectuer la division de 4 par 1,2

$$4 \div 1,25 = \frac{4}{1,25} = \frac{4 \times 100}{1,25 \times 100} = \frac{400}{125}$$

$$4 \div 1,25 = 3,2$$

$$\begin{array}{r} 400 \quad | \quad 125 \\ - 375 \quad | \quad 3,2 \\ \hline 250 \quad | \\ - 250 \quad | \\ \hline 0 \quad | \end{array}$$

**III- Comparer des fractions****1) Comparer deux fractions en les comparant à 1****Propriété**

Soient  $a$  et  $b$  deux nombres ( $b > 0$ ).

- Si  $a > b$ , alors  $\frac{a}{b} > 1$ .
- Si  $a < b$ , alors  $\frac{a}{b} < 1$ .
- Si  $a = b$ , alors  $\frac{a}{b} = 1$ .

**Exemple**

On veut comparer  $\frac{4}{5}$  et  $\frac{11}{3}$ .

On a  $4 < 5$  alors  $\frac{4}{5} < 1$ . On a aussi,  $11 > 3$  alors  $\frac{11}{3} > 1$ . Conclusion :  $\frac{4}{5} < \frac{11}{3}$ .

**2) Encadrer une fraction entre deux entiers consécutifs****Propriété**

Toute fraction peut être encadrée par deux nombres entiers consécutifs.

Si  $a$  et  $b$  sont deux nombres entiers ( $b \neq 0$ ), on a  $q \leq \frac{a}{b} < q + 1$ .

Le nombre  $q$  est le quotient de la division euclidienne de  $a$  par  $b$

**Exemple** On veut encadrer  $\frac{186}{23}$ .

$$\begin{array}{r} \underline{186} \quad | \quad 23 \\ \underline{184} \quad | \quad 8 \\ \hline 2 \quad | \end{array} \quad 184 = 23 \times 8 + 2$$

$$8 < \frac{186}{23} < 9$$

### 3) Comparer deux fractions

#### Propriété

- Pour comparer deux fractions qui ont le **même numérateur**, on compare leurs dénominateurs. La fraction la plus grande est celle qui a le dénominateur le plus petit.
- Pour comparer deux fractions qui ont le **même dénominateur**, on compare leurs numérateurs. La fraction la plus grande est celle qui a le numérateur le plus grand.
- Pour comparer deux fractions de **dénominateurs différents**, on peut commencer par les écrire avec le même dénominateur.

#### Exemples

$$\frac{12}{7} < \frac{12}{5} \text{ car } 5 < 7.$$

$$\frac{4}{5} < \frac{9}{5} \text{ car } 4 < 9$$

On veut comparer  $\frac{2}{7}$  et  $\frac{3}{14}$

$$\frac{2}{7} = \frac{2 \times 2}{7 \times 2} = \frac{4}{14}$$

$$\text{or } 4 > 3 \text{ alors } \frac{4}{14} > \frac{3}{14} \text{ donc } \frac{2}{7} > \frac{3}{14}$$

### IV- Additionner et soustraire des fractions

#### Propriété

Pour additionner ou soustraire deux fractions qui ont le même dénominateur :

- On additionne ou on soustrait les numérateurs ;
- On garde le dénominateur commun

$$\frac{a}{k} + \frac{b}{k} = \frac{a+b}{k} \quad \frac{a}{k} - \frac{b}{k} = \frac{a-b}{k} \quad (k \neq 0)$$

#### Remarque

Pour additionner ou soustraire deux fractions qui ont des dénominateurs différents, on doit commencer par les écrire avec le même dénominateur.

#### Exemples

$$\frac{5}{3} + \frac{6}{3} = \frac{5+6}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\frac{16}{8} - \frac{13}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{12} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12} + \frac{5}{12} = \frac{14}{12}$$

$$\frac{21}{6} - \frac{5}{3} = \frac{21}{6} - \frac{5 \times 2}{3 \times 2} = \frac{21}{6} - \frac{10}{6} = \frac{11}{6}$$