Triangles semblables

I- Triangles égaux : (Rappel)

Définition

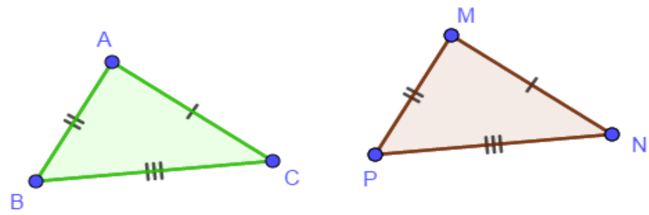
Deux triangles sont égaux lorsque leurs côtés sont deux à deux de même longueur.

Exemple : Les triangles ABC et MNP sont égaux car :

AB = MP

BC = PN

AC = MN

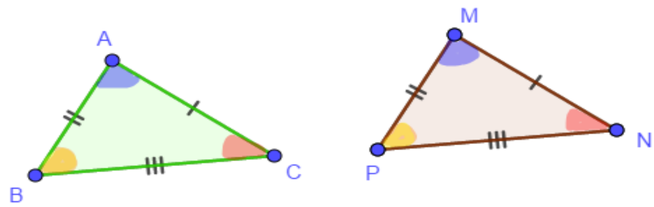


Propriété

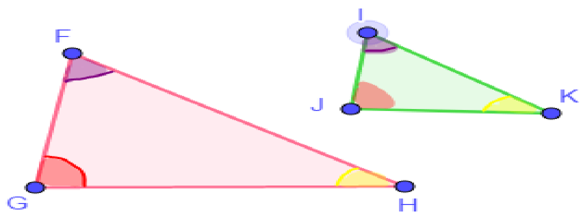
Si deux triangles sont égaux alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Exemple : Les triangles ABC et MNP sont égaux alors

$$\widehat{BAC} = \widehat{PMN}$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{MPN}$$
$$\widehat{ACB} = \widehat{MNP}$$



Remarque : Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors ils ne sont pas forcément égaux.



Propriété

Si deux triangles ont, deux à deux, un angle de même mesure compris entre deux côtés respectivement de même longueur, alors ils sont égaux.

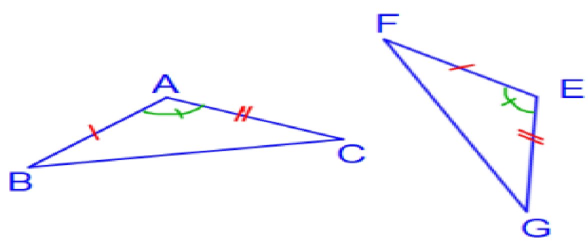
Exemple :

On a $\widehat{BAC} = \widehat{FEG}$

AB = EF

AC = EG

alors les ABC et EFG sont égaux.

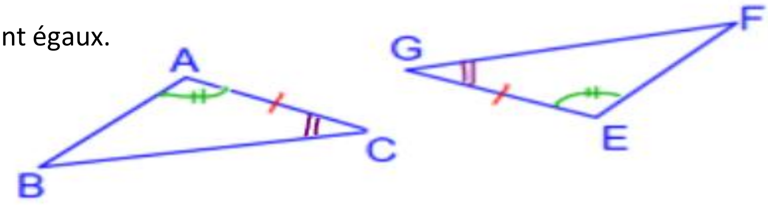


Propriété

Si deux triangles ont, deux à deux, un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement de même mesure, alors ils sont égaux.

Exemple :

On a $\widehat{BAC} = \widehat{GEF}$
AC = GE
$\widehat{ACB} = \widehat{FGE}$ alors les ABC et EFG sont égaux.



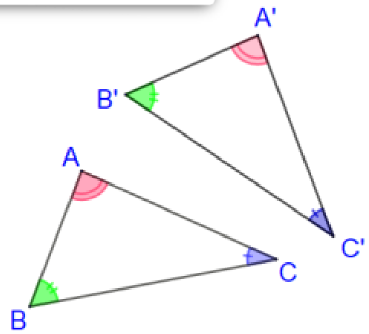
II- Triangles semblables

Définition

Deux triangles sont semblables lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Exemple :

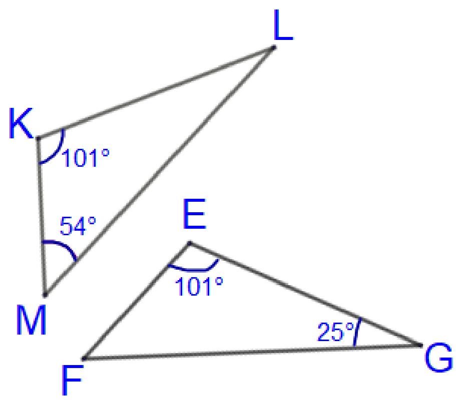
On a : $\begin{cases} \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \\ \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \\ \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'} \end{cases}$ alors les triangles ABC et A'B'C' sont



Application : Montrer que les triangles EFG et KLM sont semblables.

Solution :

On sait que la somme des mesures des angles dans un triangle est égale à 180°. Donc pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit de montrer qu'ils ont deux paires d'angles deux à deux de même mesure.



Dans le triangle KLM : $\widehat{KLM} + \widehat{KML} + \widehat{MKL} = 180°$.

Donc $\widehat{KLM} = 180° - \left(\widehat{KML} + \widehat{MKL}\right) = 180° - (54° + 101°) = 25°$

On a alors : $\widehat{KLM} = \widehat{EGF}$ et $\widehat{MKL} = \widehat{FEG}$

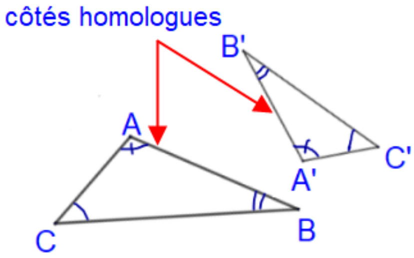
D'où les triangles EFG et KLM sont semblables.

Remarque :

Si deux triangles sont égaux alors ils sont semblables mais deux triangles semblables ne sont pas forcément égaux.

Propriété :

Si deux triangles sont semblables alors les longueurs des côtés opposés aux angles égaux sont proportionnelles.
Les côtés réunis par paire sont appelés **homologues.**



Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables car $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$, $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$. Donc le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

Longueurs du triangle ABC	**AB**	**AC**	**BC**
Longueurs du triangle ABC	**A'B'**	**A'C'**	**B'C'**

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

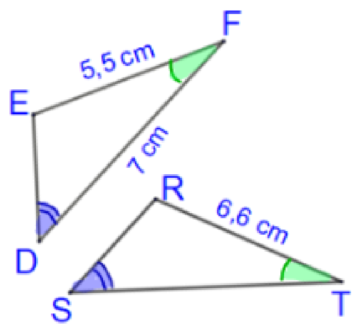
On dit que ABC est un agrandissement du triangle A'B'C'.

Application : Les triangles EDF et RST sont semblables, calculer ST.

Solution :

On a les triangles EDF et RST sont deux triangles semblables donc les longueurs de leurs côtés sont deux à deux proportionnelles.

Longueurs du triangle EDF	**ED**	**EF**	**DF**
Longueurs du triangle RST	**RS**	**RT**	**ST**



$$\frac{RS}{ED} = \frac{RT}{EF} = \frac{ST}{DF} \quad d'où \frac{6{,}6}{5{,}5} = \frac{ST}{7}$$

En utilisant l'égalité des produits en croix : $ST = \frac{7\times 6{,}6}{5{,}5} = 8{,}4\ cm$

Remarque : $\frac{RT}{EF} = \frac{6{,}6}{5{,}5} = 1{,}2.$

On dit que le triangle RST est un agrandissement du triangle EDF de rapport $1{,}2$.

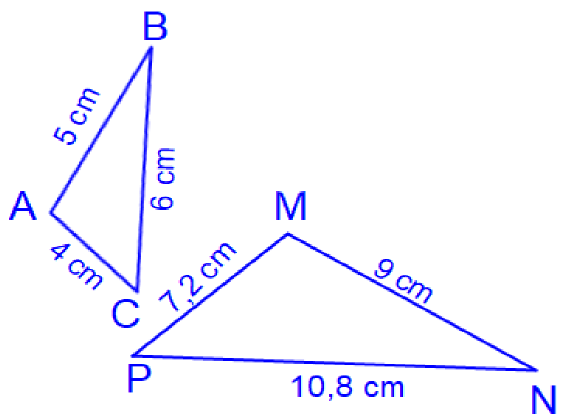
Propriété

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont deux à deux proportionnelles, alors ces triangles sont

Application : Justifier que les triangles ABC et MNP sont semblables.

Solution :

On cherche à savoir si les longueurs des côtés des triangles sont deux à deux proportionnelles. On peut réaliser un tableau avec les longueurs des côtés de la plus petite à la plus grande.



Longueurs du triangle ABC	**AC**	**AB**	**BC**
Longueurs du triangle RST	**MP**	**MN**	**PN**

On calcule les rapports des longueurs séparément puis on les compare :

$$\frac{MP}{AC} = \frac{7,2}{5} = 1,8$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{9}{5} = 1,8$$

$PN \quad 10,8$

Les rapports des longueurs sont égaux alors les triangles ABC et MNP sont semblables

On passe des côtés du triangle ABC aux côtés du triangles MNP en multipliant par 1,8. Donc le triangle MNP est un agrandissement tu triangle ABC de rapport 1,8.