

Probabilité

I- Vocabulaire

1) Issue d'une expérience :

Définition

On appelle **issue** d'une expérience, chacun des résultats possibles de cette expérience.

2) Expérience aléatoire

Définition

Une expérience est dite **aléatoire** si elle a plusieurs issues possibles sans savoir avec certitude quelles seront les issues produites.

Une expérience aléatoire est basée uniquement sur le hasard.

Exemples

Expérience 1 : « On lance une pièce de monnaie non truquée ». On regarde ensuite la face supérieure.



Deux issues sont possibles : pile ou face

Expérience 2 : « On lance un dé à six face non truqué ». On regarde ensuite le nombre de points sur la face supérieure.



Six issues sont possibles : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.

Expérience 3 : « On lance une roue de loterie ». On regarde sur quelle couleur la flèche va se trouver.



3 issues sont possibles : rose ; jaune et bleu

3) Événement

Définition

Un **événement** est un ensemble d'issues. Un événement est réalisé lorsque l'une des issues qui le composent est réalisée.

Exemples

Dans l'expérience 2 du lancer de dé à six faces :

Soit A l'événement : « **Obtenir un nombre pair** ». L'événement A est constitué des issues : 2 ; 4 et 6.

Soit B l'événement : « **Obtenir un nombre impair** ». L'événement B est constitué des issues : 1 ; 3 et 5.

Soit C l'événement : « **Obtenir le nombre supérieur à 6** ». L'événement C est un événement qui ne peut pas se réaliser.

4) Événements particuliers

a) Événement élémentaire

Définition

Un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue

Exemple :

Dans l'expérience 2, lors d'un lancer de dé, non truqué, à six faces :

Soit K l'événement « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 ». L'événement K est constitué des issues 1 ; 2 et 3. K n'est pas un événement élémentaire.

Soit P l'événement « Obtenir le nombre 3 ». P est un événement élémentaire.

b) Événement contraire

Définition :

L'**événement contraire** d'un événement A est celui que se réalise lorsque A ne se réalise pas.

On le note $\bar{A}$ qui se lit "A barre" ou "événement contraire de A".

Exemple Voici une urne avec des boules indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard et on regarde sa couleur.



Soit P l'événement : « Tirer une boule rouge ».

L'événement contraire de P est « Tirer une boule qui n'est pas rouge ».

On le note $\bar{P}$.

c) Événement impossible et événement certain

Définitions

Un événement est dit **impossible** s'il ne peut pas se réaliser.

Un événement est dit **certain** s'il se produit nécessairement.

Exemples Dans l'exemple précédent, les événements :

- « Tirer une boule blanche » est un événement impossible.
- « Tirer une boule jaune ou verte ou rouge ou noire » est un événement certain.

d) Événements incompatibles**Définition**

Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemples Lors de l'expérience du lancer de dé non truqué à six faces, soient :

- A l'événement « Obtenir un nombre pair »
- B l'événement « Obtenir un nombre impair »
- C l'événement « Obtenir le nombre 6 »

Les événements A et B sont incompatibles car on ne peut pas obtenir un nombre qu'il soit pair et impair en même temps.

Les événements A et C sont dits compatibles car ils peuvent se réaliser en même temps. 6 est un nombre pair.

II- Probabilité**1) Définition intuitive**

La probabilité d'un événement A peut être déterminée par un quotient. Ce nombre représente la chance que l'événement A se réalise lors d'une expérience aléatoire. On note cette probabilité **P(A)**.

Exemple

Une urne contient 3 boules rouges, une boule verte et deux boules bleues. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à sa couleur.

Soit A l'événement « Tirer une boule rouge ».

$$\text{On a donc } P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

On a 3 chances sur 6 de tirer une boule rouge, soit une chance sur 2.

2) Calculer une probabilité

Lorsque les issues d'une expérience aléatoire ont tous la même probabilité alors on dit que l'on est dans une situation **d'équiprobabilité**.

La probabilité d'un événement A est :

$$P(A) = \frac{\text{Nombre d'issues favorables}}{\text{Nombre d'issues possibles}}$$

Exemple Lors d'un lancer de dé, non truqué, à six faces, soit A l'événement « Obtenir un nombre pair ».

Les issues favorables à l'événement A sont : 2 ; 4 ; et 6. **(3 issues favorables)**

Les issues possibles : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6. **(6 issues possibles)**.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3) Propriétés :

- La probabilité d'un événement A est un nombre compris entre 0 et 1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
- Un **événement impossible** B est un événement qui ne peut se réaliser, soit $P(B) = 0$.
- Un **événement certain** C est un événement qui est sûr de se réaliser, soit $P(C) = 1$.
- La probabilité que deux événements incompatibles se réalisent l'un ou l'autre est égale à la somme de leur probabilité.
- La probabilité d'obtenir l'événement contraire à un événement A est égale à $1 - P(A)$.
 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Exemples Lors d'un lancer de dé non truqué à six faces, soient :

- A, l'événement « **Obtenir un nombre impair** ».
- B, l'événement « **Obtenir le nombre 2** ».
- C, l'événement « **Obtenir un nombre pair ou impair** ».
- D, l'événement « **Obtenir le nombre 7** ».
- E, l'événement « **Obtenir un nombre impair ou le nombre 2** ».

C est un événement certain, $P(C) = 1$.

D est un événement impossible, $P(D) = 0$.

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ et } P(B) = \frac{1}{6} \quad A \text{ et } B \text{ sont deux événements incompatibles.}$$

$$P(E) = P(A) + P(B) = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

L'événement $\overline{B}$ contraire à l'événement B consiste à obtenir un nombre différent de 2.

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

4) Probabilité et fréquence**Définition**

Quand une expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois, la fréquence relative de réalisation d'un événement se rapproche de la valeur de la probabilité de cet événement.

Exemple On peut faire la simulation d'une expérience aléatoire d'un lancer de dé à six faces, non truqué, en utilisant un tableur. La fonction « Alea () » permet de choisir des nombres entiers au hasard compris entre 1 et 6.

La probabilité d'obtenir une face particulière du dé est égale à $\frac{1}{6} \approx 0,166$.

On s'intéresse à une des faces. Soit A l'événement « Obtenir le nombre 1 ». $P(A) = \frac{1}{6}$.

On simule 100 expériences puis 10 000 expériences de lancer de dé et on note la face obtenue à chaque fois. On compare ensuite la fréquence d'apparition de chaque face avec la valeur de la probabilité relative à cet événement.

On rappelle que la fréquence de l'apparition d'une face est égale $\frac{\text{Nombre d'apparitions de cette face}}{\text{Nombre total des apparitions}}$.

Voici deux tableaux simulant 100 expériences et 10 000 expériences :

1 00 expériences

Face contenant le nombre :	Nombre d'apparition correspondants	Fréquence d'apparition
1	17	0,1700
2	22	0,2200
3	17	0,1700
4	19	0,1900
5	19	0,1900
6	6	0,0600

Fréquence de l'apparition du nombre 1 :

$$P(A) = \frac{17}{100} = 0,17$$

La fréquence d'apparition du nombre 1 est loin de la valeur de la probabilité de l'événement A car le nombre de lancers est petit.

10 000 expériences

Face contenant le nombre :	Nombre d'apparition correspondants	Fréquence d'apparition
1	1652	0,1652
2	1617	0,1617
3	1586	0,1586
4	1677	0,1677
5	1753	0,1753
6	1715	0,1715

$\approx 0,166$

Avec 10 000 lancers, on remarque que la fréquence d'apparition du nombre 1 est très proche de la probabilité de cet événement. Le même constat pour les autres faces.

III- Expérience à deux épreuves

1) Arbre pondéré

Définition

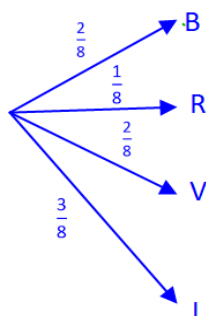
Dans une expérience aléatoire, un arbre de probabilité pondéré est un schéma constitué de branches. Ces branches indiquent les issues de l'expérience et spécifie sur chacune d'elle la probabilité correspondante.

Exemples



On fait tourner une roue avec des secteurs de couleurs différentes et on regarde le secteur marqué par la flèche.

On peut construire un arbre pondéré correspondant à cette expérience :



Les issues possibles sont : B ; R ; V ; J.

$$P(B) = \frac{2}{8} ; P(R) = \frac{1}{8} ; P(V) = \frac{2}{8} ; P(J) = \frac{3}{8}$$

$$P(B) + P(R) + P(V) + P(J) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

2) Expérience à deux épreuves

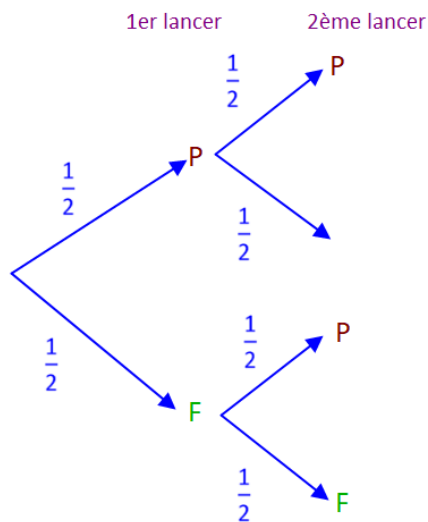
Exemple

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie :

On lance une fois la pièce de monnaie et on note son résultat. Soit **P** (pile) ou **F** (face)

On lance une deuxième fois la pièce de monnaie et on note de nouveau son résultat.

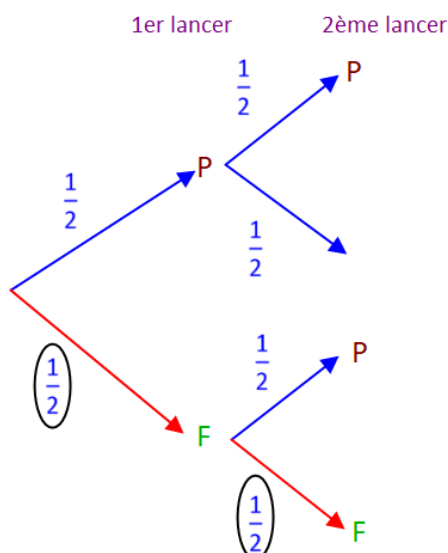
On peut représenter ces résultats avec l'arbre pondéré ci-dessous :



Propriété

Avec un arbre pondéré, la probabilité de l'issue auquel conduit un chemin est égale au produit des probabilités rencontrées le long du chemin.

Exemple Dans l'expérience à deux épreuves précédentes, on calcule la probabilité d'obtenir deux fois de suite la face F. Donc on s'intéresse au couple (F ; F).



La probabilité de l'issue (F ; F) est égale à la probabilité de l'issue F au 1^{er} lancer multipliée par la probabilité de l'issue F au 2^{ème}

lancer . Soit : $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$