Proportionnalité

I- Rappel

1) Reconnaître une situation de proportionnalité :

Définition

Deux grandeurs sont **proportionnelles** si les valeurs de l'une s'obtiennent en multipliant les valeurs de l'autre par un même nombre. Ce nombre est appelé **coefficient de proportionnalité.**

Exemples : Pour savoir si deux grandeurs représentées dans un tableau sont proportionnelles, on peut calculer les quotients des valeurs correspondantes de ces grandeurs puis les comparer.

Exemple 1 :

$\times \frac{1}{1,6}$

Grandeur 1	3,5	4,3	11,2
Grandeur 2	5,6	6,88	17,72

$\times \mathbf{1,6}$

$$\frac{5,6}{3,5} = \mathbf{1,6} \quad \frac{6,88}{4,3} = \mathbf{1,6} \quad \frac{17,72}{11,2} = \mathbf{1,6}$$

Les quotients sont égaux alors ce tableau est un tableau de proportionnalité. On dit que la grandeur 1 et la grandeur 2 sont proportionnelles. 2,3 est un coefficient de proportionnalité.

Exemple 2 :

Grandeur 1	3,6	5,7	9,2
Grandeur 2	5,04	7,98	11,96

$$\frac{5,04}{3,6} = 1,4 \quad \frac{7,98}{5,7} = 1,4 \quad \frac{11,96}{9,2} = 1,3$$

Les quotients ne sont pas égaux alors ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité. On dit que la grandeur 1 et la grandeur 2 ne sont pas proportionnelles.

2) Calculer une quatrième proportionnelle :

Propriété :

Dans une situation de proportionnalité, on peut utiliser **l'égalité des produits en croix**.
Soient $a, b, c \;\; et \; d$ des nombres avec $b \neq 0 \; et \; d \neq 0$.
Le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité.

a	b
c	d

$On \; a \; donc \; \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \; (ou \; \frac{b}{a} = \frac{d}{c})$

$et \; donc \; \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{d} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

Cette égalité se nomme
L'égalité des produits en croix

Remarque : Dans une situation de proportionnalité, la quatrième proportionnelle est le quatrième nombre calculé à partir de 3 autres nombres déjà connus.

Exemples

x	9,3
12,2	20

$$x \times 20 = 9,3 \times 12,2$$

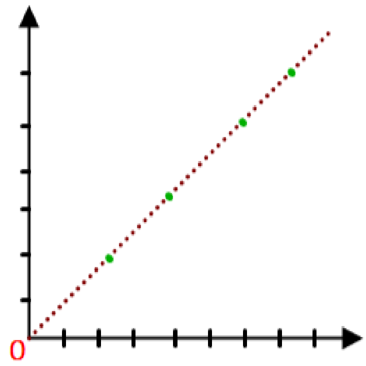
$$x = \frac{9,3 \times 12,2}{20} = 5,673$$

1) Caractérisation graphique d'une situation de proportionnalité

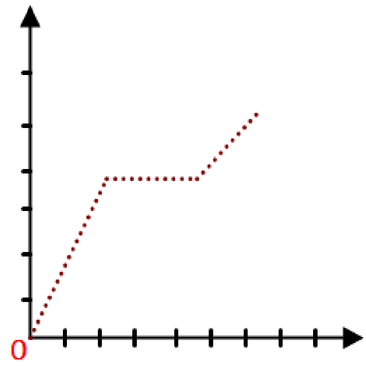
Propriétés

- Toute situation de proportionnalité se représente graphiquement par des points alignés avec l'origine du repère.
- Tout graphique dont les points sont alignés avec l'origine du repère, représente une situation de proportionnalité.

Exemples



Ce graphique représente une situation de proportionnalité car les points sont alignés avec l'origine du repère: c'est une droite qui passe par l'origine.



Ce graphique ne représente pas une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère

II- Augmentation et réduction

Propriétés

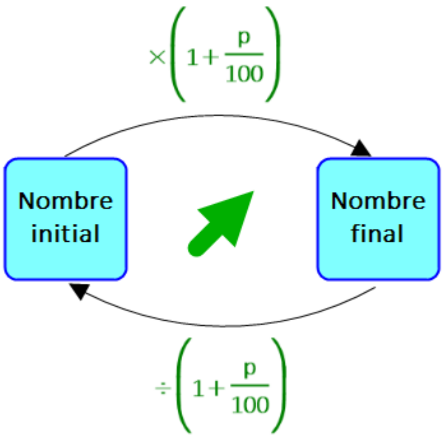
- **Augmenter** un nombre de p % revient à multiplier ce nombre par $1+\frac{p}{100}$.
- **Diminuer** un nombre de p % revient à multiplier ce nombre par $1-\frac{p}{100}$.

Définitions

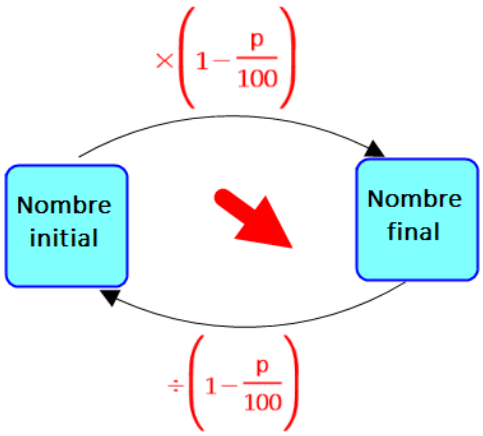
- Dans le cas d'une augmentation ou d'une diminution de p %, p % est appelé **taux d'évolution**.
- On dit que le nombre $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ $(respectivement\ 1-\frac{p}{100})$ est **le coefficient multiplicateur.**

Remarque : Dans le cas d'une augmentation, le coefficient multiplicateur qui permet de passer du nombre initial au nombre final est supérieur à 1 et dans le cas d'une diminution il est inférieur à 1.

Augmentation de p %



Diminution de p %



Exemples

1) Un téléviseur coûte 720 €. Pendant les soldes, son prix a baissé de 30 %. Quel est son prix après la réduction ?

Le coefficient multiplicateur est égal à $1-\frac{30}{100}=0{,}7$

Le prix après réduction : 720 € x 0,7 = 504 €.

2) Une commune voit le nombre de ses habitants augmenter de 10 % en 5 ans. Sachant que cinq ans en arrière, cette commune comptait 6 500 habitants. Quel est le nombre de ces habitants après l'augmentation ?

Le coefficient multiplicateur est égal à $1+\frac{10}{100}=1{,}1$

Le nombre d'habitants après augmentation :

6 500 x 1,1 = 7 150, soit 7 150 habitants.

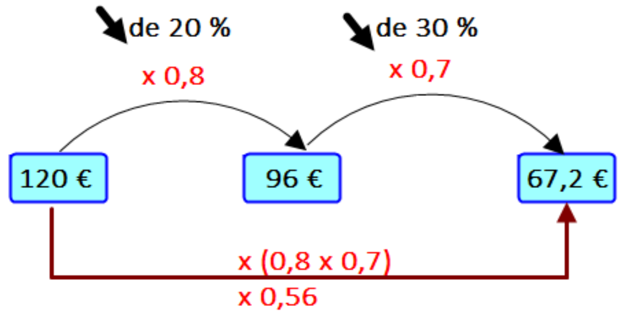
Attention on ne peut pas additionner ou soustraire des pourcentages. L'orque l'on applique successivement deux augmentations, ou deux diminutions ou une augmentation suivie d'une di munition ou l'inverse, il faut multiplier le nombre initial par le coefficient multiplicateur qui correspond au produit des coefficients multiplicateurs successifs.

Exemple : Une veste coutait 120 €. Son prix a baissé de 20 % puis un autre rabais de 30 %. Quel est son nouveau prix ?

Prix de la veste après la 1ère réduction : $120\times\left(1-\frac{20}{100}\right)=120\times 0{,}8=96\,,soit$ 96 €.

Prix de la veste après la 2ème réduction : $96\times\left(1-\frac{30}{100}\right)=96\times 0{,}7=67{,}2, soit$ 67,2 €.

$0{,}8\times 0{,}7=0{,}56\,,1-0{,}56=0{,}44$ alors cette veste a subi une baisse de 44 % et non 50 %.



III- Grandeurs composées

1) Grandeurs

Définition

Une grandeur est une caractéristique d'un objet qui se mesure ou se calcule.

Exemples

La longueur, l'aire, l'angle, la durée, la taille, l'âge, la masse….

Remarque : Une grandeur est invariante mais elle peut être mesurée et exprimée à l'aide de différentes unités.

Exemple : La longueur du segment [AB] est égale à 4,5 cm. AB = 4,5 cm = 45 mm.

2) Grandeurs produits

Définition

Une grandeur produit s'obtient en multipliant deux grandeurs.

Exemples

- L'aire d'un rectangle est une grandeur produit car elle est égale au produit de deux longueurs.

L'aire d'un rectangle de dimensions 2 cm et 3 cm est égale à $2\ cm \times 3cm = 6\ cm^2$

- L'énergie consommée par un appareil électrique est une grandeur produit elle est donnée par la formule $\boldsymbol{Energie = Puissance \times Temps}$.

Un sèche-cheveux d'une puissance de 1 800 W (watts) fonctionne pendant 3 heures consomme une énergie $E = 1\,800\ w \ \times 3\ h = 5\,400$ Wh (watts-heure).

3) Grandeurs quotients

Définition

Une grandeur quotient s'obtient en divisant deux grandeurs.

Exemples

- La vitesse moyenne d'un mobile s'obtient en divisant la distance parcourue par la durée du trajet.

$$\boxed{\boldsymbol{v = \frac{d}{t}}}$$

Un véhicule a parcouru 250 km en 1 h 30 min. Sa vitesse v peut être exprimée en km/h

$v = \frac{d}{t} = \frac{250\ km}{1{,}5\ h} \approx 166{,}7\ km/h \quad (on\ note\ aussi\ km.h^{-1})$

- La masse volumique d'un corps s'obtient en divisant la masse de ce corps par son volume.
  La masse volumique de l'eau pure est de $1\,000\ g.L^{-1}$. $\rho_{eau} = \frac{1\,000\ g}{1\ L} = 1\,000\ g.L^{-1}$.

IV- Les ratios

Définition :

Soient a, b et c trois nombres entiers non nuls.
Si on partage une quantité Q en deux parts P_1 et P_2 selon le ratio a : b, alors les parts P_1 et P_2 sont en proportionnalité avec les nombres a et b.

$$\frac{P_1}{a} = \frac{P_2}{b} = \frac{Q}{a+b}$$

1) Partager selon un ratio

Exemple : Appliquer un ratio donné

Ihsane et Johann se partagent 28 cartes Pokémon dans le ratio 4 :3. Calculer le nombre de cartes reçus par chacun des enfants.

Le nombre de parts est égal à 7 (3 + 4 = 7).

Ihsane : $\frac{4}{7} \times 28 = 16, \text{soit } 16 \text{ cartes Pokémon.}$

Johann : $\frac{3}{7} \times 28 = 12, \text{soit } 12 \text{ cartes Pokémon.}$

Exemple 2 : En utilisant l'égalité des produits en croix

Chahine, Kehyna et Catherine se partagent la somme de 330 € dans le ratio 2 : 3 : 5. Quelle somme chaque personne a-t-elle reçue ?
Soient x, y et z les sommes perçues respectivement par Chahine, Kehyna et Catherine.
On a $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{330}{10}$ (Le nombre de parts est égal à 2 + 3 + 5 = 10)
Pour trouver x, y et z, on peut utiliser l'égalité des produits en croix.

$\frac{x}{2} = \frac{330}{10}$ $x = \frac{2 \times 330}{10} = 66$	$\frac{y}{3} = \frac{330}{10}$ $y = \frac{3 \times 330}{10} = 99$	$\frac{z}{5} = \frac{330}{10}$ $z = \frac{330 \times 5}{10} = 165$

Chahine a eu 66 €, Kehyna a eu 99 € et Catherine a eu 165 €.

2) Déterminer une quantité à l'aide d'un ratio donné

Exemple : Dans un club de karaté, le ratio filles : garçons est de 5 : 7. Le club compte 63 garçons. Calculer le nombre de filles.

Soient a le nombre de filles et b le nombre de garçons.

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{7} \quad alors \quad \frac{a}{5} = \frac{63}{7} \quad d'où \quad a = \frac{5 \times 63}{7} = 45.$$

Ce club compte 45 filles.